VI GEOGEBRA ITALIAN DAY - 2016

CONFERENZE PLENARIE

Aitzol Lasa

Dynamic software in the learning of algebra

During a period of six years, from 2009 to 2015, the group of Mathematics Education at NUP/UPNA University developed a didactical engineering to teach algebraic procedures in DBH4 grade (college students, age 15-16), using the dynamic geometry software instrument GeoGebra.

In particular, students where requested to solve systems of non-linear equations (line-parabola) integrating two material supports: "dynamic geometry software" and "paper and pencil". In this context, we use the Theory of Instrumental Genesis to describe the instrument GeoGebra, we overcome the classical tendency to classify dynamic models according to student computational skills (computing-mastery) and we propose an alternative classification, which depends on the type of mathematical activity we want to promote with the dynamic model. Therefore, we elude associated didactical phenomena, such as "metacognitive shift" and "illusion of transparency".

Our didactical frame locates the instrument within two didactical theories which can predicts and interpret potential and effective teaching and learning processes: the *Theory of didactical situations in mathematics,* and the *Ontosemiotic approach to mathematical practice and instruction*. We use qualitative and quantitative methods to analyse the results: *a priori* and *a posteriori* comparisons (inherent to didactical engineering), descriptive statistics, test hypothesis and implicative statistical analysis.

The results take into account three dimensions: sociological and socio-linguistic, pedagogical and didactic. Such conclusions determine: (1) how dynamic geometry software allow students to progress in algebraization levels, (2) the influence of dynamic geometry software in the didactical contract, and (3) the optimization of a study process, which integrates the material supports "dynamic geometry software" and "paper and pencil". Our findings provide concrete guidelines for teachers, who can use them to design learning and teaching processes in the future.

Keywords: dynamic models, explorative, didactical situations, Ontosemiotic approach.

Giovannina Albano, Umberto Dello Iacono

GeoGebra, E-learning e Digital Storytelling: una possibile integrazione per l'apprendimento in matematica

Il lavoro che qui presentiamo è inserito in una ricerca più ampia (Dello Iacono 2015; Albano, Dello Iacono, Mariotti 2016; Albano, Dello Iacono, Fiorentino 2016) riguardante il disegno e l'implementazione di un Digital Storytelling Interattivo in Matematica (DIST-M), con lo scopo di delineare un modello di piattaforma on-line che organizzi task matematici basati su un approccio vygotskiano (Vygotskij *et al*., 1973).

Qui ci focalizziamo sull'uso di applicazioni, realizzate con GeoGebra e incorporate all'interno del DIST-M, e in particolare all'integrazione tra GeoGebra e il modulo Lesson di Moodle. Tali applicazioni, progettate a diversi livelli di difficoltà e con vari scopi, possono essere raggruppate in tre tipologie:

1. Esercizi interattivi: permettono allo studente di esercitarsi e verificare l'acquisizione di una abilità base su definizioni e procedure di calcolo. Si tratta di tutorial per attività successive.
2. Domande grafiche interattive: sono orientate alle competenze e permettono allo studente la manipolazione vincolata di oggetti grafici allo scopo di investigare e congetturare.
3. Domande semi-aperte interattive: mirano al passaggio da un registro colloquiale a un registro più evoluto (Ferrari, 2004). Attraverso la manipolazione di oggetti linguistici (blocchi parole), lo studente deve convertire una sua propria frase libera in una frase equivalente che sia più adeguata alla comunicazione scientifica. Questo tipo di applicazione si pone come via di mezzo tra le domande a risposta chiusa e le domande aperte.

Tutte le applicazioni restituiscono un codice numerico che cambia dinamicamente a seconda delle manipolazioni fatte dallo studente. Il codice consente al progettista tenere conto delle specifiche interazioni dello studente e di utilizzare tali informazioni per personalizzare il percorso di apprendimento all'interno della Lesson di Moodle. Ciò permette di realizzare una struttura di pagine ad albero di decisione, dove lo studente viene indirizzato a una opportuna pagina successiva a seconda di come ha interagito nell'attività.

RIFERIMENTI

Albano, G., Dello Iacono, U., Fiorentino, G. (2016). An online Vygotskian learning activity model in mathematics. To appear in *Je-LKS (Journal of e-Learning and Knowledge Society)*.

Albano, G., Dello Iacono, U., Mariotti, M.A. (2016). Argumentation in mathematics: mediation by means of digital interactive storytelling. *Form@re - Open Journal per la formazione in rete*, Vol. 16, N. 1, 105-115.

Dello Iacono, U. (2015). Un modello di attività vygotskijana integrando Moodle e GeoGebra. In M. Rui, L. Messina & T. Minerva (eds.), *Teach different!* Proc. Multiconferenza EMEMITALIA 2015. Genova University Press.

Ferrari, P.L. (2004). Mathematical language and advanced mathematics learning. In M. Johnsen Høines & F. Berit (eds.), Proc. of PME-28. Cape Town, South Africa.

Vygotskij, L. S., Costa, A. M., Veggetti, M. S., Costa, A. F., & Gatti, M. P. (1973). *Pensiero e linguaggio*. Giunti/Barbèra.

VI GEOGEBRA ITALIAN DAY - 2016

WORKSHOP

WS1

F. Arzarello, S. Beltramino, N. Bruno, A. Delù, P. Gianino, D. Merlo, M. Mosca, A. Ruzittu, C. Sabena, C. Simondi, L. Atzori, B. Villa, E. Vio, M.C. Balcet, F. Broglio, G. Capecchi, L. Cordiali, P. Eandi, V. Ferrazza, F. Magonara, D. Martorano, M. Mattei, D. Merlo, A. Quintavalle, O. Robutti, G. Trinchero, A. Lasa.

Cosa succede in classe se andiamo alla ricerca di variazioni in matematica?

Livello Scolare: Tutti

Attività e situazioni di apprendimento, basate sull'uso della didattica laboratoriale e sul metodo della ricerca variata, con il supporto di GeoGebra.

L'attività didattica è stata oggetto di studio e sperimentazione da parte di due gruppi afferenti il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino: il gruppo di ricerca didattica coordinato dal professor F. Arzarello (*) e il corso di Lauree Scientifiche "TaskDesign con GeoGebra" coordinato dalla prof.ssa O. Robutti (**).

L'obiettivo di questo laboratorio è di illustrare la metodologia della cosiddetta ricerca variata e alcuni esempi di applicazione nelle classi con il supporto di GeoGebra. L'idea è di mettere gli studenti in situazioni prevalentemente matematiche e stimolarli a effettuare osservazioni, formulare ipotesi, coinvolgendoli così in un processo di ricerca di invarianti e di variazioni e avvicinandoli alla costruzione di problemi che poi dovranno risolvere, il tutto accompagnato dalla necessità di sviluppare il linguaggio e la fase argomentativa. Si favorirà così il superamento dello schema tradizionale (situazione data / risolvi / dimostra) per generare una comprensione più profonda e ampia.

Si propone una metodologia atta a coinvolgere maggiormente gli studenti e aiutarli nei processi di apprendimento della matematica. Siamo convinti che il superamento delle criticità nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica possa passare anche attraverso il cambiamento di visione del ruolo dello studente e dell'insegnante: con la proposta presentata in questo laboratorio lo studente non deve solo risolvere problemi ma è stimolato ad osservare, analizzare, costruirsi problemi, cercare invarianti e variazioni anche utilizzando i supporti tecnologici disponibili nell'aula (preferibilmente software liberi). Inoltre la metodologia presentata si propone di coinvolgere gli studenti anche emotivamente, al fine di combattere l'idea purtroppo diffusa di una matematica difficile, noiosa, poco interessante, costruita con "regolette": l'obiettivo è di proporre pratiche in classe che permettano agli studenti di sviluppare quello che A. Schoenfeld chiama il "senso della matematica". Ai docenti verranno mostrati percorsi di apprendimento, in situazione di Problem solving e Problem posing con il software coerenti con questo obiettivo.

Grazie alla trasversalità del metodo, esso si adatta ad ogni livello scolare e a tutti gli indirizzi.

Durante il laboratorio i partecipanti verranno invitati a sperimentare direttamente la metodologia proposta ponendo il gruppo in situazione.

A partire da esempi tratti dalle sperimentazioni condotte in diverse classi, dalla scuola primaria alla secondaria di secondo grado, il laboratorio avrà come obiettivo l'analisi e la discussione delle ricadute didattiche degli stessi, nell'ottica di uno sviluppo verticale delle competenze relative al problem solving e problem posing, all'argomentazione matematica, alla discussione e alle rappresentazioni matematiche mediante diversi registri (si vedano i documenti introduttivi alla Matematica per il cittadino, UMI 2001-2003).

(*) Il gruppo è composto da F. Arzarello, S. Beltramino, N. Bruno, A. Delù, P. Gianino, D. Merlo, M. Mosca, A. Ruzittu, C. Sabena, C. Simondi, L. Atzori, B. Villa, E. Vio

(**) Il gruppo è composto da F. Arzarello, M.C. Balcet, S. Beltramino, F. Broglio, G. Capecchi, L. Cordiali, P. Eandi, V. Ferrazza, F. Magonara, D. Martorano, M. Mattei, D. Merlo, A. Quintavalle, O. Robutti, G. Trinchero e con A. Lasa dell'Universidad Pública de Navarra durante la sua permanenza a Torino.

WS2

Corrado Agnes, Angelo Merletti

Usare GeoGebra per recuperare il gusto per la dimostrazione nell'insegnamento di matematica e fisica

Livello Scolare: Secondaria di II Grado V anno - FISICA

In un precedente Workshop Difima (2015)[1] abbiamo fatto vedere che è possibile rappresentare l'invariante Energia Quantità di Moto con un triangolo rettangolo, e che dalle proprietà di questo triangolo discendono le trasformazioni di Lorentz sia per le quantità dinamiche che per quelle cinematiche. In una comunicazione plenaria del concomitante Geogebraday[2] abbiamo fatto vedere come le precedenti conclusioni possono essere implementate con Geogebra.

Nel Workshop proposto ci occuperemo delle dimostrazioni dei risultati precedenti, che, come è ben noto per tutta la teoria della relatività, non richiedono strumenti matematici più complicati della geometria ed algebra elementari. Ma la particolarità didattica della teoria della relatività consiste appunto nel fatto che padroneggiare le formule non equivale in alcun modo alla comprensione delle medesime, come dimostrato dal fatto che le trasformazioni di Lorentz fossero state ricavate prima che si chiarisse il loro significato nella struttura dello spazio e del tempo.

È nostra convinzione che lo strumento Geogebra consenta di fare simulazioni convincenti sulla validità dei risultati, fatto che pur non essendo una dimostrazione formale, può almeno essere l'inizio di una spiegazione.

WS3

Roberto Balaudo, Laura Borello, Anna De Ambrosis, Massimiliano Malgieri, Pasquale Onorato, Simona Falabino

Fisica quantistica e moto browniano con GeoGebra

Livello Scolare: Secondaria di II Grado V anno - FISICA

Da quando la fisica moderna è diventata parte fondamentale nei programmi dell'ultimo anno dei Licei Scientifici e della seconda prova dell'esame di stato si fa sempre più forte la richiesta di validi strumenti per visualizzare la teoria, dato che gli esperimenti di laboratorio sono scarsi e difficili.
Le simulazioni con GeoGebra possono dare un valido supporto in questo campo, per le peculiari valenze di questo strumento e per la sua rapida diffusione fra gli insegnanti. Nel workshop saranno presentate e discusse tre simulazioni realizzate con GeoGebra su argomenti di fisica moderna: due simulazioni riguardano l'approccio alla fisica quantistica basato sul metodo dei "cammini di Feynman", la terza riguarda il modello atomico della materia e il moto browniano.
Dopo una breve presentazione delle tre simulazioni, si aprirà un dibattito, aperto anche ai partecipanti al workshop, sulle valenze e difficoltà dell'uso di GeoGebra per le applicazioni alla fisica moderna.

1) Simulazioni GeoGebra per l'insegnamento della fisica quantistica con il metodo della somma sui cammini di Feynman.

Massimiliano Malgieri, Pasquale Onorato, Anna De Ambrosis

Negli ultimi tre anni il gruppo di Didattica della Fisica dell'Università di Pavia ha lavorato sul problema dell'insegnamento della fisica quantistica, cui è stato dato, dalla recente riforma dei programmi scolastici, un peso rilevante nella scansione oraria del V anno dei Licei scientifici. Seguendo una tradizione di ricerca che è partita, in Italia, dall'Università di Torino, ci siamo concentrati in particolare sull'approccio basato sui cammini di Feynman, estendendo e innovando le proposte precedenti ed effettuando sperimentazioni, sia nella formazione insegnante, sia direttamente con gli studenti di scuola superiore.

L'approccio di Feynman è basato su un modello matematico che permette una semplice e intuitiva visualizzazione, e per questo motivo in gran parte delle proposte che si basano su di esso le simulazioni hanno un ruolo centrale. Nel nostro caso, le simulazioni sono state realizzate con GeoGebra, avendo in mente in special modo i vantaggi nella formazione degli insegnanti: molti docenti infatti conoscono bene il software, che utilizzano frequentemente per la didattica della matematica. La struttura delle simulazioni risulta quindi trasparente, e gli insegnanti possono modificarle o crearne di nuove sulla base di quelle già esistenti, per simulare diversi fenomeni o esperimenti. Per quanto riguarda l'utilizzo in

---

[1] L'identità di massa ed energia come seme per l'insegnamento della relatività.

[2] Uso di Geogebra per introdurre la relatività speciale e le trasformazioni di Lorentz partendo dall'identità di massa ed energia

classe, inoltre, rendere le simulazioni disponibili con GeoGebra Tube consente agli studenti di utilizzarle anche senza necessariamente dover scaricare il software.

In questo intervento mostreremo e discuteremo alcune simulazioni da noi realizzate, a partire da quelle riguardanti fenomeni più semplici (riflessione, rifrazione, diffrazione e interferenza di fotoni) per giungere a quelle che modellizzano fenomeni ed esperimenti più avanzati (sistemi risonanti, interferometri, particella confinata in una buca di potenziale) allo scopo di renderli comprensibili agli studenti della scuola secondaria di secondo grado. Sarà messa in evidenza la relazione tra struttura della simulazione (ciò che viene visualizzato) e il modello di "oggetto quantistico" che si intende trasmettere agli studenti, alla luce delle indicazioni della ricerca in didattica sul ruolo della visualizzazione nell'apprendimento della fisica quantistica. Saranno infine presentati progetti futuri e simulazioni in via di realizzazione.

2) Quantizzazione con i cammini di Feynman: un'ipotesi di lavoro con GeoGebra per i licei scientifici.

Roberto Balaudo, Laura Borello

Il lavoro nasce come sviluppo di un progetto precedentemente realizzato in Excel da Laura Borello e Gianna Rovero nell'ambito del progetto SECIF, ripresentato durante un corso di aggiornamento organizzato dall'A.I.F. sull'utilizzo di una versione "semplificata" del metodo dei cammini di Feynman per l'analisi di alcuni problemi di meccanica quantistica come la diffrazione di particelle da fenditure.

Il problema prende in considerazione una particella con una di quantità di moto p che, partendo da un certo punto iniziale, dopo aver attraversato una fenditura singola, o doppia, di una certa larghezza d non trascurabile, vada ad impattare su di uno schermo.

L'idea fondamentale su cui si basano sia il progetto originale in Excel che quello realizzato con GeoGebra, è quella di partire dall'idea di quantizzazione "alla Feynman". Nella quantizzazione alla Feynman, la probabilità che una particella che ad un istante t_A sia in un punto A si trovi in B nell'istante t_B, si calcola considerando tutti i possibili cammini che uniscono A a B e assegnando a ognuno di essi una probabilità che, sintetizzando molto, viene ad essere formata da un'ampiezza costante e da una "fase" che è data, sostanzialmente, dall'esponenziale complesso dell'azione classica S calcolata su un certo cammino γda A a B: $\exp(i2\pi S/h)$ dove h è la costante di Planck.

Da un punto di vista matematico la quantizzazione con i cammini di Feynman è ovviamente improponibile in un contesto liceale, ma lo stesso Feynman ne elaborò una versione "divulgativa" introducendo alcune ipotesi che potessero renderla comprensibile, nella sua sostanza, anche ad un utente non specializzato. L'idea è, in buona sostanza, quella di associare a ogni cammino considerato un "fasore" ossia un vettore che ruota compiendo un giro completo ogni volta che la particella compie, sul cammino preso in considerazione, un percorso di lunghezza pari alla lunghezza d'onda λ di De Broglie che le è associata dalla relazione $\lambda=h/p$

Poiché la lunghezza dei cammini considerati dal punto iniziale a quello finale è diversa, nel punto di arrivo ci saranno diversi "fasori" (uno per ogni cammino) ruotati uno rispetto all'altro. L'ampiezza della somma vettoriale di questi "fasori", darà la probabilità di avere la particella in quel punto. L'idea della rotazione nasce dal fatto che l'esponenziale complesso dell'azione, che rappresenta la fase della probabilità associata al cammino considerato, può essere vista come la rotazione di un vettore di ampiezza costante e questo è un concetto che uno studente di liceo possiede quando arriva al quinto anno.

Il progetto realizzato con GeoGebra consta di tre files: uno più didattico che illustra l'idea del metodo di Feynman e altri due che applicano il metodo all'analisi della diffrazione di particelle su fenditura singola e doppia.

In ognuna delle analisi sono parametrizzabili la massa della particella considerata, la sua velocità, la distanza della particella dalla fenditura e quella della fenditura dallo schermo, la larghezza della fenditura e il numero di cammini di Feynman, ossia di spezzate, da considerare

Come risultato il file dà graficamente per ogni punto di arrivo una linea di lunghezza pari all'ampiezza della risultante dei fasori che si hanno in quel punto; in altre parole la probabilità di trovare la particella in quel punto. Facendo spostare l'analisi tramite un cursore su ogni punto, si arriva a determinare una distribuzione di probabilità per la diffusione della particella.

Il progetto può essere utilizzato in una quinta liceo per illustrare il metodo dei cammini di Feynman in modo grafico e verrà proposto in alcune quinte di licei scientifici per valutarne l'efficacia nel facilitare la comprensione di alcuni argomenti di meccanica quantistica.

3) Il moto browniano nella Fisica dell'ultimo anno di liceo con GeoGebra

Simona Falabino

Il moto browniano deriva il suo nome dal botanico britannico Robert Brown. Nel 1827, mentre studiava un problema legato all'impollinazione, osservò al microscopio il moto apparentemente casuale dei granelli di polline in sospensione nell'acqua. Solo parecchi anni più tardi, nel 1905, Einstein ne diede una interpretazione teorica. Nel 1908, infine, Paul Langevin formulò l'equazione che descrive la traiettoria delle particelle browniane. Oggi l'equazione di Langevin è il punto di partenza per lo studio di processi stocastici che trovano applicazione in fisica, biologia, nanotecnologie, economia e finanza. Nella Fisica del Novecento la comprensione del moto browniano rappresentò una evidenza sperimentale decisiva dell'esistenza degli atomi e del moto di agitazione termica delle particelle microscopiche.

In questo intervento si propone l'utilizzo di un semplice modello di moto di particelle browniane in due dimensioni realizzato con GeoGebra, da sperimentare nel corso di Fisica del quinto anno di liceo in una lezione laboratoriale di un'ora.

La trattazione del moto browniano permette l'applicazione di concetti di probabilità e statistica e rappresenta una non consueta applicazione della distribuzione gaussiana in Fisica.

Il file di GeoGebra visualizza la simulazione del moto browniano e permette agli studenti di calcolare i parametri statistici relativi al moto delle particelle, come la media e la varianza delle componenti spaziali della posizione delle particelle, verificandone dinamicamente la dipendenza dal tempo, dalla temperatura del liquido e dalla massa delle particelle.

Durante questa esercitazione gli studenti possono quindi visualizzare concretamente un fenomeno come il moto browniano, che difficilmente avrebbero la possibilità di osservare in un laboratorio scolastico, ed esplorare, anche quantitativamente, le caratteristiche del processo di diffusione di particelle in un fluido.

WS4

Maria Cantoni, Donatella Merlo, Ada Sargenti

GeoGebra non è una lavagna dinamica
(Esperienze dai corsi de La Casa degli Insegnanti – CTS)

<u>Livello Scolare: Tutti</u>

I primi corsi ufficiali da parte de La Casa degli Insegnanti, che è partner nel GeoGebra Institute di Torino, hanno avuto luogo nell'anno scolastico 2010-11. Più che "corsi" noi preferiamo chiamarli "percorsi" perché gli obiettivi sono ben più articolati rispetto alla semplice conoscenza del software. Nella progettazione delle proposte fatte negli anni entrano infatti in gioco molti aspetti di formazione. Il lavoro con GeoGebra comporta per noi una riflessione sulle metodologie di insegnamento della matematica che ci paiono doversi modificare in funzione dell'uso del software. Esso dovrebbe portare nella direzione di studenti attivi nella costruzione del loro sapere con docenti più attenti alle difficoltà che emergono nell'evolversi del lavoro, in un processo sempre controllato.
Ciò che vogliamo qui esemplificare è come lo strumento sia in grado di dare vantaggio "economico" e procedurale, ma soprattutto divenga suggeritore di processi intelligenti. Essi ci portano in campi inesplorati e ci concedono di costruire realtà nuove.
Non dimentichiamo che lo strumento (che è poi frutto della creatività umana), storicamente ha sempre consentito progresso se utilizzato da un uomo protagonista. GeoGebra porta fortemente la mente a formulare ipotesi, a tenere presente ciò che man mano emerge dall'analisi della situazione e permette il giusto richiamo alle conoscenze che spesso non sono attive se non sollecitate.
Vedremo allora come un utilizzo precoce del software, fin dalla scuola primaria, consenta agli allievi di raggiungere con più facilità le astrazioni geometriche con cui dovranno confrontarsi nei gradi scolastici successivi fino al biennio della scuola superiore e oltre. Immaginiamo quindi un percorso a ritroso servendoci di alcuni problemi-tipo di cui studieremo le strategie risolutive con l'uso di GeoGebra.

1. Un problema discusso nell'ambito del corso della secondaria di II grado è stato preso da un libro di testo molto usato. In esso si chiede di trovare il luogo del baricentro di un triangolo di cui sono date le coordinate di due vertici, al variare del terzo. L'obiettivo è quello di impratichirsi nella risoluzione di esercizi della geometria analitica, cosa per altro anche importante, ma che può diventare un meccanismo sterile senza senso per gli studenti. Alla fine dell'esercizio il testo propone il file GeoGebra in cui il grafico "conferma" dinamicamente quanto ottenuto per via algebrica! La metodologia didattica da applicare a questo esercizio può invece essere molto più ricca di senso e riflessioni per gli studenti. Intanto si può partire da un triangolo qualsiasi, quindi si può osservare che cosa accade al baricentro, sia nel triangolo scelto sia variando gli altri due vertici; scoprire se vi sono delle regolarità nel

comportamento e cercare una giustificazione logica delle stesse. Solo dopo che il senso del tutto è stato acquisito, si può passare alle esercitazioni con i calcoli!

2. Nel triennio della scuola secondaria di primo grado il Teorema di Pitagora è evidenziato come snodo fondamentale e usato in esercizi che divengono sostanzialmente calcoli di radici quadrate che forse portano lontano dal suo reale significato. Qui diamo un esempio di lavoro in cui GeoGebra ci permette di evidenziare un uso interessante del teorema legato alla corona circolare, alla proprietà distributiva negli insiemi numerici (punto focale del linguaggio algebrico e difficile per i ragazzi), all'equivalenza delle aree, al volume di coni e cilindri. Ne vedremo una potenzialità che gli strumenti convenzionali non possono permettere.

3. Il triangolo è una figura fondamentale per tutta la geometria. Già dalla scuola primaria i bambini imparano a costruirla e a manipolarla in vari modi. Vedremo come attraverso alcuni problemi sia possibile esplorarne tutte le caratteristiche e arrivare a una diversa consapevolezza della sua struttura e di alcune relazioni fondamentali come la relazione triangolare e la somma degli angoli interni. Strumento fondamentale: il cerchio e le isometrie.

WS5

Maria Giovanna Frassia, Annarosa Serpe

PNSD on the road con GeoGebra

Livello Scolare: Secondaria di II Grado I Biennio

L'inserimento della modellizzazione nei curricula di Matematica a scuola si rivela di fondamentale importanza per lo sviluppo di competenze per il problem-solving in quanto promotore della relazione tra la Matematica studiata a scuola e la Matematica della vita di tutti i giorni. La disamina delle relazioni che intercorrono tra il mondo reale e il mondo relativo al modello rappresenta il punto di partenza dell'apprendimento per mezzo della modellizzazione matematica, attività guidata dal bisogno di descrivere, prevedere o spiegare un qualche particolare fenomeno di interesse da studiare. L'incontro tra la modellizzazione matematica e la tecnologia facilita la risoluzione di problemi tratti dal mondo reale; nello specifico, il computer diviene terreno fertile per l'apprendimento, stimola la discussione, accresce la motivazione e al contempo permette di riconoscere l'importanza della Matematica nella vita. In riferimento al" *Extended modelling cycle-regarding technology*" di Seller & Greefrath, viene proposto un laboratorio, rivolto alle prime classi della scuola secondaria di II grado, sulle equazioni di I grado a partire da situazioni problematiche riconducibili al mondo reale. Il laboratorio, nato nell'ambito delle attività di formazione del Piano Nazionale Scuola Digitale (PNSD), si avvale del software di geometria dinamica GeoGebra per la modellizzazione e la risoluzione delle situazioni proposte.

Bibliografia

Doerr, H.M. (1996). STELLA ten years later: A review of the literature. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1, (pp.201-224).

Galbraith, P.L., Stillman, G., Brown, P., & Edward, I. (2007). Faciliting middle school modelling competencies. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, &S. Khan (Eds.), Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics (pp.130-140). Chichester: Horwood.

Goos, M. (1998). Technology as a tool for transforming mathematical tasks. In P. Galbraith, W. Blum, G. Booker, & I.D. Huntley (Eds.), *Mathematical modelling: Teaching and assessment in a technology-rich world* (pp. 103-113). Chichester: Horwood.

Lester, F., & Kehle, P. (2003). From problem solving to modelling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh & H.M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Model and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp.501-518). Mahwath, NJ: Erlbaum.

Rivera, S., Londono, S., & Lopez, C. (2015) Measurement of area and volume in an authentic context: An alternative learning experience through mathematical modelling. In G.A. Stillman, W. Blum, & M.S. Biembengut (Eds.) *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp.229-240). Cham: Springer.

Siller, H. S., & Greefrath, G. (2010). Mathematical modelling in class regarding to technology. In *Proceedings of the sixth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2136-2145).

Legge 107/2015, comma 56 url: http://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/2015/07/15/15G00122/sg

WS6

Monica Mattei, Silvia Beltramino, Carlotta Idrofano, Daniela Pavarino, Annarosa Rongoni, Cinzia Soldera

Attività per una matematica accessibile e inclusiva

Livello Scolare: Tutti

Il laboratorio si basa sui lavori sviluppati nel progetto di ricerca "Metodologie, tecnologie, materiali e attività per un apprendimento della matematica accessibile e inclusivo" finanziato da Fondazione CRT e realizzato dal Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Torino con il coordinamento della Prof.ssa Ornella Robutti. Il gruppo di lavoro*, basandosi sui più attuali risultati di ricerca in tale ambito, ha progettato alcune attività per gli studenti della scuola secondaria di primo e secondo grado, in parte rivedendole dal progetto M@t.abel, in parte ex novo, con l'intento di puntare su un'ottica fortemente inclusiva, al fine di coinvolgere gli allievi con difficoltà nel lavoro di classe. Le attività sono poi state sperimentate nelle classi e si sono analizzati i processi degli studenti.

Il laboratorio si propone di coinvolgere i partecipanti nella sperimentazione in prima persona di alcune delle attività inclusive progettate. Si analizzeranno quindi quali sono le caratteristiche che possono favorire l'inclusività di una attività, a partire dalla fase di progettazione per arrivare alla fase di sperimentazione in classe, senza trascurare il coinvolgimento emotivo degli studenti. Una particolare attenzione verrà dedicata al ruolo della tecnologia, e in particolare di GeoGebra, e al suo contributo nel processo di inclusione di tutti gli studenti.

Per la scuola secondaria di I grado si proporrà, in particolare, un'attività nel nucleo Geometria relativa all'introduzione dei concetti di perpendicolare e di distanza di un punto da una retta, per arrivare al concetto di altezza. Un naturale sviluppo di tale lavoro porterà al concetto di altezza nello spazio. Per il biennio della scuola secondaria di II grado è prevista un'attività di esplorazione che permette di stimolare la riflessione e la produzione di congetture da parte degli studenti, con l'obiettivo di ricerca di regolarità, fino ad arrivare alla loro formalizzazione attraverso una relazione matematica, con le relative argomentazioni. L'esplorazione e la conseguente produzione di congetture sono affidate alla manipolazione con GeoGebra e si prevede, come obiettivo finale, la giustificazione delle congetture. L'attività ha anche lo scopo di intrecciare il linguaggio algebrico con quello naturale e con quelli numerico e grafico.

* Gli insegnanti che hanno partecipato al gruppo di ricerca sono: S. Abbati, B. Baldi, S. Beltramino, A. Berra, E. Calemma, A. Cena, P. Curletti, M. Dalè, A. Drivet, S. Fratti, L. Genoni, A. Ghersi, P. Gulino, C. Idrofano, D. Pavarino, F. Raina, A. Rongoni, D. Sasso, C. Soldera, G. Trinchero.

WS7

Liliana Paparo

I poligoni stellati: un esempio di coding con GeoGebra

Livello Scolare: Secondaria di II Grado I Biennio

Il workshop descrive l'esperienza di realizzazione del GeoGebraBook *Poligoni Stellati* realizzato dagli studenti di una classe prima ITI (indirizzo Informatica e Telecomunicazioni, IIS A. Badoni, Lecco) nell'ambito del progetto interdisciplinare più ampio "*Matematica…Stellare*" che ha coinvolto matematica, informatica e disegno.

La realizzazione dei file inseriti nel book, suddiviso in 6 attività, ha permesso agli studenti di partire dall'acquisizione di nozioni essenziali di matematica discreta, geometria ed uso dello strumento GeoGebra, fino a raggiungere gradualmente, in un crescendo di curiosità e scoperte, un buon livello di approfondimento nei tre ambiti.

L'aspetto del coding è quello che li ha coinvolti maggiormente.

Gli studenti, sollecitati ad esplorare le proprietà geometriche e matematiche dei poligoni stellati, sono partiti dalla realizzazione della relativa costruzione geometrica.

Si sono ben presto resi conto della lunghezza, laboriosità e ripetitività dell'attività con l'aumentare del numero n dei lati del poligono di partenza.

Per poterne esplorare le proprietà e caratteristiche in tempi rapidi, hanno compreso che dovevano rendere automatica la costruzione di uno stellato assegnati il numero n dei lati del poligono di base e quello k del salto gestiti attraverso due rispettivi slider.

Hanno studiato e sperimentato comandi avanzati di GeoGebra ed hanno imparato a lavorare in modo consapevole con: i cicli iterativi (comando SUCCESSIONE, LISTAINDICI), le istruzioni condizionali (comando SE), la scrittura di un testo dinamico, l'uso dei parametri (SLIDER), l'uso degli operatori logici (visualizzazione condizionata, caselle di inserimento).

Le attività proposte nel book sono costitute da uno o più file GeoGebra interattivi preceduti da una domanda stimolo rivolta all'utente e seguiti dalla proposta di un'ulteriore attività o una riflessione.

Qui di seguito la sintesi delle varie attività che compongono il book *Poligoni Stellati*:

0) Presupponendo nota la definizione di poligono stellato, l'utente è invitato ad osservare un primo file contenente gli stellati che si possono costruire a partire da un poligono di 16 lati, è invitato a riflettere su quanto l'attività sia laboriosa ed osservare come, in un secondo file il problema sia stato risolto con l'uso delle spezzate.
1) Lo studente è guidato, attraverso un testo dinamico, a scoprire la distinzione tra stellato semplice e composto, è invitato ad esprimere una congettura in merito alla relazione tra il numero *n* dei lati del poligono convesso di partenza ed il valore del "salto " *k* in modo da ottenere uno stellato semplice.
2) Lo studente è invitato a verificare la sua congettura nel caso di un ettagono, poi di un ottagono ed infine di un poligono di cui si può stabilire a scelta il numero dei lati. Viene introdotta la funzione TOTIENTE.
3) Allo studente è richiesto di riflettere se si ottengono poligoni diversi per ogni salto assegnato. L'obiettivo è quello di scoprire che $P\{n,k\} = P\{n,n-k\}$
4) Viene proposta l'analisi degli stellati composti ottenuti rispettivamente da poligoni di 12 o 16 lati. Attraverso l'uso della doppia finestra grafica è possibile visualizzare il poligono regolare la cui rotazione genera lo stellato composto.
5) Avendo compreso che $P\{n,k\} = P\{n,n-k\}$ e che, se il salto è 1 o *n-1*, otteniamo il caso particolare del poligono di partenza, lo studente è invitato a contare gli stellati semplici nel caso *n=7*, *n=12* ed *n* qualsiasi (fino a 50).
6) Allo studente è proposto di individuare e classificare il poligono stellato su cui si basa un'immagine tratta da contesti artistici o architettonici.

https://www.geogebra.org/m/x7hK9Rt4# http://56adcaf39442456adcaf39cd30.edu.glogster.com/matematica-stellare/

WS8

Maria Spreafico, Daniele Tavella, Leonardo Vesprini, Martina Vita

Analisi matematica di architetture e opere d'arte

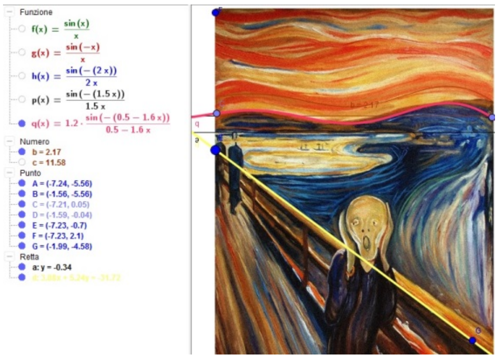
Livello Scolare: Università, Secondaria di II Grado II Biennio e V anno

In questo workshop vorremmo presentare due elaborati realizzati dagli studenti di Architettura del Politecnico di Torino (Corso di Istituzioni di Matematiche, a.a. 2015/16), e uno realizzato da una studentessa di liceo scientifico. Nei tre casi si tratta di una lettura matematica di immagini legate all'arte e all'architettura (un panorama cittadino con elementi architettonici costruiti, la pianta della zona comprendente il parlamento di Canberra e un quadro: "Urlo" di Munch). Per la natura degli strumenti utilizzati questa proposta è adatta anche ai trienni di molte scuola superiori di secondo grado. I passi della prova erano i seguenti:

1) Scelta dell'immagine del soggetto da analizzare.
2) Individuazione di alcune linee o curve significative nell'immagine selezionata.
3) Inserimento dell'immagine nella schermata di GeoGebra e ricerca delle equazioni matematiche che meglio approssimano le linee o curve scelte in precedenza.
4) Discussione critica degli elementi trovati.

Lo volgimento del punto 3) ha permesso agli studenti di utilizzare gli strumenti matematici introdotti durante le lezioni. In particolare, partendo dai grafici delle funzioni elementari, gli studenti hanno lavorato sulle trasformazioni di funzioni e grafici (traslazioni, dilatazioni, ribaltamenti) per approssimare le linee individuate in 2).

La possibilità di veloci modifiche alle equazioni e visualizzazione dei relativi grafici con GeoGebra ha permesso agli studenti di verificare immediatamente l'esito delle loro scelte di trasformazione e di apportare eventuali miglioramenti.
Dal punto di vista didattico, si è ribaltata la tradizionale idea di studio di funzione: questa volta, dato il "grafico" possibile gli studenti sono dovuti risalire alle equazioni delle funzioni approssimanti. L'esperienza è stata senza dubbio molto positiva: gli studenti hanno visto la matematica più vicina al loro corso di studi e hanno avuto lo spunto di imparare a leggere la realtà che li circonda anche con uno sguardo matematico.



a)

b)

c)

a) Funzioni e valutazione delle aree delle zone a colore dominante;
b) Funzioni approssimanti trascendenti;
c) Coniche a Canberra.

WS9

Luciano Zazzetti, Giovanna Valori

Alla scoperta della funzione integrale: potenzialità di un approccio dinamico.

Livello Scolare: Secondaria di II Grado V anno

Anche alla luce delle sollecitazioni che le tracce della seconda prova di matematica pongono, si ritiene opportuno un approccio al teorema fondamentale del calcolo integrale che vada al di là del "semplice" enunciato in forma analitica.
Per un apprendimento più significativo si vuole mostrare l'intimo legame tra derivata di una funzione in un punto e funzione integrale.
Mentre di norma gli studenti non hanno difficoltà ad apprendere l'enunciato del teorema od anche a tracciare un andamento qualitativo della derivata prima dal grafico di una funzione, l'esperienza mostra che il passaggio inverso risulta meno intuitivo.
La combinazione delle capacità dinamiche e semplicità d'uso fanno di Geogebra uno strumento ideale allo scopo.
Nonostante la semplicità d'uso riconosciuta, la costruzione della funzione integrale non risulta così immediata e così può essere opportuno guidare gli studenti. Lo strumento più adatto allo scopo può essere un software che registra quello che avviene sullo schermo insieme ad eventuali commenti del docente o di chi comunque sta registrando le operazioni. Una volta appreso come sia possibile tracciare il grafico di $F(x) = \int_a^x g(t)dt$ gli studenti possono essere guidati alla scoperta delle relazioni fra le caratteristiche delle funzioni *F(x) e g(x)* utilizzando diversi registri rappresentativi. Si propongono attività formative a più livelli di approfondimento e schede di lavoro anche su quesiti assegnati agli Esami di Stato.
L'obiettivo è quello di colmare il gap fra capacità di calcolo e comprensione concettuale.

VI GEOGEBRA ITALIAN DAY - 2016

COMUNICAZIONI

CO1

Virginia Alberti, Sara Labasin, Ferdinando Arzarello, Eugenia Taranto, Arianna Coviello, Sara Gaido

MOOC di Geometria: presupposti, obiettivi e risultati

Livello Scolare: Tutti

Nell'ottobre 2015 ha preso forma e vita il progetto Math MOOC UniTo: si tratta di MOOC (Massive Open Online Course) nati dal Master di secondo livello "Formatori in Didattica della Matematica", promossi dal Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino e destinati alla formazione di docenti in servizio di scuola secondaria sui Nuclei delle Indicazioni Ministeriali (Numeri, Geometria, Dati e Previsioni, Relazioni e Funzioni). Sono quindi MOOC creati da insegnanti per insegnanti. Gli insegnanti-autori lavorano alla progettazione, produzione ed erogazione dei MOOC in collaborazione con alcuni docenti e ricercatori universitari.

La finalità che si persegue è quella di tracciare la strada per una nuova modalità di formazione, che tenga conto delle esigenze della nuova società in termini di ICT (Information Communication Technology), creatività e condivisione, e di monitorarne i passaggi al fine di valutarne l'impatto e la ricaduta nelle pratiche didattiche, affinché l'utilizzo della tecnologia generi un apprendimento consapevole.

L'intento del contributo è proprio quello di raccontare quanto è emerso dalla primissima esperienza di formazione docenti interamente a distanza: dal 26 ottobre 2015, per un totale di 8 settimane di attività, si è erogato il primo MOOC, meglio noto come "MOOC Geometria", le cui attività erano suddivise in 6 moduli con cadenza settimanale o bi-settimanale. In ogni settimana, per i docenti corsisti c'erano a disposizione video di pochi minuti in cui interveniva un docente universitario che introduceva il nodo concettuale su cui verteva la settimana; bacheche di comunicazione (come forum, padlet o tricider) in cui i corsisti erano invitati a lasciare commenti sul materiale fruito e/o a condividere esperienze inerenti il proprio insegnamento, le proprie pratiche didattiche, il proprio sviluppo professionale.

Tutte le attività erano presentate mediante l'app digitale versatile Sway, che consente di integrare al suo interno diversi contenuti, non solo di testo, ma anche interattivi: si passa da testo e immagini, a video, mappe, grafici interattivi e file Geogebra che i corsisti potevano scaricare o utilizzare direttamente sulla piattaforma.

Il corso si è svolto interamente a distanza, con 3 webinar tenuti da esperti (Prof.ri O. Robutti, F. Arzarello e Dott.ssa A. Coviello), ovvero seminari interattivi, di circa un'ora e mezza ciascuno, tenuti sulla piattaforma, grazie alla risorsa BigBlueBottom (http://bigbluebutton.org/).

Alla fine di ogni modulo, un semplice test era volto a verificare che tutti avessero conseguito gli obiettivi di apprendimento prefissati e, dunque, a rilasciare un badge che testimoniasse tali risultati.

La conclusione del MOOC prevedeva la realizzazione della progettazione di un'attività didattica da parte di ogni docente corsista, mediante uno specifico software web-based, e la revisione tra pari che ogni docente avrebbe dovuto realizzare revisionando la progettazione di un collega.

A tutti coloro che hanno ottenuto i badge di tutti i moduli ed espletato le sopra descritte attività finali, è stato rilasciato un certificato di partecipazione.

I numeri sono molto rappresentativi: si contano 424 iscritti, con almeno un rappresentante per ogni regione italiana, e di questi il 36% ha concluso il MOOC nella totalità delle attività previste.

Un aspetto molto interessante riguarda la comunità di pratica e di riflessione che si è venuta a creare all'interno di questo ambiente online. A tal proposito, coinvolgeremo alcuni corsisti per possano raccontare la loro esperienza e far vedere i loro lavori.

CO2

F. Arzarello, S. Beltramino, N. Bruno, A. Delù, P. Gianino, D. Merlo, M. Mosca, A. Ruzittu, C. Sabena, C. Simondi, L. Atzori, B. Villa, E. Vio, M.C. Balcet, F. Broglio, G. Capecchi, L. Cordiali, P. Eandi, V. Ferrazza, F. Magonara, D. Martorano, M. Mattei, D. Merlo, A. Quintavalle, O. Robutti, G. Trinchero, A. Lasa.

Cosa succede in classe se andiamo alla ricerca di variazioni in matematica?

Livello Scolare: Tutti

Attività e situazioni di apprendimento, basate sull'uso della didattica laboratoriale e sul metodo della ricerca variata, con il supporto di GeoGebra.

L'attività didattica è stata oggetto di studio e sperimentazione da parte di due gruppi afferenti il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino: il gruppo di ricerca didattica coordinato dal professor F. Arzarello (*) e il corso di Lauree Scientifiche "TaskDesign con GeoGebra" coordinato dalla prof.ssa O. Robutti (**).

L'obiettivo di questo laboratorio è di illustrare la metodologia della cosiddetta ricerca variata e alcuni esempi di applicazione nelle classi con il supporto di GeoGebra. L'idea è di mettere gli studenti in situazioni prevalentemente matematiche e stimolarli a effettuare osservazioni, formulare ipotesi, coinvolgendoli così in un processo di ricerca di invarianti e di variazioni e avvicinandoli alla costruzione di problemi che poi dovranno risolvere, il tutto accompagnato dalla necessità di sviluppare il linguaggio e la fase argomentativa. Si favorirà così il superamento dello schema tradizionale (situazione data / risolvi / dimostra) per generare una comprensione più profonda e ampia.

Si propone una metodologia atta a coinvolgere maggiormente gli studenti e aiutarli nei processi di apprendimento della matematica. Siamo convinti che il superamento delle criticità nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica possa passare anche attraverso il cambiamento di visione del ruolo dello studente e dell'insegnante: con la proposta presentata in questo laboratorio lo studente non deve solo risolvere problemi ma è stimolato ad osservare, analizzare, costruirsi problemi, cercare invarianti e variazioni anche utilizzando i supporti tecnologici disponibili nell'aula (preferibilmente software liberi). Inoltre la metodologia presentata si propone di coinvolgere gli studenti anche emotivamente, al fine di combattere l'idea purtroppo diffusa di una matematica difficile, noiosa, poco interessante, costruita con "regolette": l'obiettivo è di proporre pratiche in classe che permettano agli studenti di sviluppare quello che A. Schoenfeld chiama il "senso della matematica". Ai docenti verranno mostrati percorsi di apprendimento, in situazione di Problem solving e Problem posing con il software coerenti con questo obiettivo.

Grazie alla trasversalità del metodo, esso si adatta ad ogni livello scolare e a tutti gli indirizzi.

Durante il laboratorio i partecipanti verranno invitati a sperimentare direttamente la metodologia proposta ponendo il gruppo in situazione.

A partire da esempi tratti dalle sperimentazioni condotte in diverse classi, dalla scuola primaria alla secondaria di secondo grado, il laboratorio avrà come obiettivo l'analisi e la discussione delle ricadute didattiche degli stessi, nell'ottica di uno sviluppo verticale delle competenze relative al problem solving e problem posing, all'argomentazione matematica, alla discussione e alle rappresentazioni matematiche mediante diversi registri (si vedano i documenti introduttivi alla Matematica per il cittadino, UMI 2001-2003).

(*) Il gruppo è composto da F. Arzarello, S. Beltramino, N. Bruno, A. Delù, P. Gianino, D. Merlo, M. Mosca, A. Ruzittu, C. Sabena, C. Simondi, L. Atzori, B. Villa, E. Vio

(**) Il gruppo è composto da F. Arzarello, M.C. Balcet, S. Beltramino, F. Broglio, G. Capecchi, L. Cordiali, P. Eandi, V. Ferrazza, F. Magonara, D. Martorano, M. Mattei, D. Merlo, A. Quintavalle, O. Robutti, G. Trinchero e con A. Lasa dell'Universidad Pública de Navarra durante la sua permanenza a Torino.

CO3

Fabio Cesare Bellon, Francesca Tarabiono

Uso di GeoGebra 3D per rappresentare e modellizzare campi elettrici e magnetici

Livello scolare: Secondaria di II Grado II Biennio e V anno – FISICA

Viene proposta una attività, supportata con l'ausilio di un file costruito con Geogebra 3D, in grado di rappresentare semplici campi elettrici generati da alcune cariche nello spazio e/o campi magnetici.
La dimensione tridimensionale consente pure di riprendere in classe la geometria solida da utilizzare come prerequisito per lo studio dei campi elettromagnetici.
Con la variazione interattiva dei parametri fisici e una visualizzazione in tre dimensioni della situazione fisica da esaminare dovrebbero risultare facilmente comprensibile gli argomenti relativi alla Legge di Faraday e alle equazioni di Maxwell

CO4

Barbara Brignone, Elena Furlan, Francesca Marzolla, Anna Vicidomini

L'esperienza della Quality Class

Livello Scolare: Secondaria di I Grado e Secondaria di II Grado I Biennio

Il progetto Quality Class, organizzato ogni anno dal Prof. Lambrecht Spijkerboer con l'aiuto della Dott.ssa Monica Mattei, coinvolge una quindicina di studenti universitari e studenti TFA o PAS creando un ambiente di scambio internazionale sul tema della didattica della matematica. In una prima fase ciascun paese partecipante presenta il proprio sistema scolastico e propone un workshop di circa tre ore. Il programma prevede quindi la partecipazione a un convegno internazionale di didattica della matematica per favorire il confronto con ricercatori universitari e insegnanti più esperti. In particolare, quest'anno il gruppo Quality Class ha partecipato al convegno CME (Children Mathematical Education) a Wroclaw (Polonia).

Durante la Quality Class il nostro gruppo italiano ha presentato un workshop sulla probabilità pensato per l'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado e il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado che può essere riadattato anche per altri livelli d'istruzione.

Il filo conduttore delle attività proposte è stato il concetto di probabilità attraverso le sue diverse sfaccettature: classica, frequentista e soggettiva.

Si è voluto evidenziare che il concetto classico di probabilità presenta dei limiti e non è quindi sufficiente a descrivere tutte le situazioni; inoltre si è sottolineato il legame tra probabilità e realtà per sviluppare nei ragazzi la capacità di prendere decisioni valutando in modo critico.

Le attività sono state pensate per favorire i collegamenti tra i vari nuclei della matematica (funzioni e relazioni, spazio e figure, dati e previsioni, aritmetica e algebra) utilizzando diverse metodologie didattiche (lavoro a gruppi, discussioni e intervento dell'insegnante) e integrando diversi tipi di strumenti (materiali poveri, software e carta e penna).

In questa sede verranno presentate le attività che il gruppo ha proposto durante la Quality Class e che vertono su alcuni esempi classici con palline da estrarre, dadi e puntine da lanciare e su alcuni esempi legati alla realtà.

CO5

Emanuele Ciancio, Annalisa Baderna, Patrizia Laiolo

Terreni infidi: rigori sbagliati e biciclette che sbandano

Livello Scolare: Secondaria di II Grado

C'è sempre solo una soluzione a un problema? Il gruppo di lavoro Math en Jeans lavora su problemi aperti e diverse piste di ricerca coinvolgendo ricercatori universitari, insegnanti e studenti di alcuni licei italiani e francesi. In particolare si presentano due lavori emersi dal progetto: la bicicletta off-road e il calcio di rigore. I lavori prevedono una modellizzazione del problema, con l'individuazione delle variabili significative e la costruzione di un modello in grado di collegarle attraverso un approccio geometrico e funzionale.

Come si può progettare una bicicletta in grado di muoversi su un terreno molto accidentato senza che il conducente ne avverta i sobbalzi? Grazie a una modellizzazione del problema a partire dal profilo del terreno, prima con l'utilizzo di materiali concreti, poi con GeoGebra è possibile "costruire" le ruote della biciletta a partire da un nuovo concetto di raggio. La costruzione con GeoGebra può essere anche d'aiuto per realizzare materialmente in classe le ruote della bicicletta, con la stessa modellizzazione matematica del problema che introduce in maniera diretta il formalismo funzionale.

Un calcio di rigore stampato sul palo può essere una grande delusione, ma non è detto… In quali condizioni il pallone entrerà comunque in porta? Insieme agli studenti abbiamo modellizzato la situazione con GeoGebra per studiare quale sono le direzioni di tiro che permettono al pallone di entrare in porta dopo aver colpito il palo. Altre variabili possono entrare in gioco e arricchire il modello.

CO6

Walter Dambrosio, Alberto Boscaggin

Analisi Matematica oggi: un percorso per l'Università

<u>Livello Scolare: Università</u>

In questa comunicazione presentiamo il percorso didattico sperimentato negli ultimi due anni nell'insegnamento di Analisi Matematica presso il corso di Laurea in Informatica dell'Università di Torino.

Il percorso sviluppa i concetti di base dell'Analisi (in particolare la derivata e l'integrale definito) utilizzando in modo integrato i registri grafico, numerico e simbolico ai diversi livelli (lezioni teoriche, esercitazioni, esame). Particolare attenzione è rivolta alla costruzione dei significati dei concetti matematici e alla loro comprensione in termini applicativi e non solo teorici, con possibili aperture verso altre discipline. L'uso di software dinamici come GeoGebra è introdotto per favorire la visualizzazione, la modellizzazione e la congettura nell'affrontare problemi e attività.

Durante l'intervento illustreremo la programmazione didattica del corso, alcuni esercizi assegnati, le metodologie e le tecnologie didattiche utilizzate (flipped-classroom, applet di GeoGebra, software di Calcolo simbolico, …) ed i risultati dell'apprendimento.

Il corso muove le basi dai materiali UMI-CIIM sull'insegnamento della matematica nei tempi attuali, si fonda su presupposti teorici sviluppati nella ricerca in didattica dell'analisi (Tall, David A. Cox ed il "Five college Project") e si presenta come una naturale estensione a livello universitario del percorso della scuola secondaria di secondo grado secondo le Indicazioni Nazionali 2010.

CO7

Barbara Kimeswenger

Identifying High-Quality GeoGebra Materials for Teaching Mathematics

<u>Livello Scolare: Tutti</u>

The purpose of this paper is to discuss criteria contributing to the quality of dynamic materials created in GeoGebra. Nowadays there is a huge number of educational resources for mathematics teaching available online. Their quality is often inconsistent, because they are provided by users and not supported by an editorial team. Therefore, it is often difficult for teachers to find suitable materials quickly for their own mathematics lessons. Since this problem is known, different material sharing platforms have implemented various ways to assess such resources. Materials can be evaluated automatically or manually, for instance, by answering a questionnaire, clicking on a like button or writing comments. It would be advantageous to create an environment allowing teachers to easily and quickly find high-quality materials for their classes.

One example of a platform with user-generated resources for mathematics teaching is the GeoGebra Materials website offering close to half a million public dynamic materials (as of July 2016). This repository shows a wide variety in terms of quality of dynamic materials for mathematics teaching. The purpose of this study is to identify important factors contributing to the quality of educational resources created by users on the GeoGebra platform. The project investigates what quality criteria for dynamic materials exist according to experts and how they describe the educational value of them. Results of this study could offer new inputs for the design of manual and/or automatic ranking and suggestion systems to make it easier to find high-quality materials on platforms such as GeoGebra.

CO8

Sara Labasin, Virginia Alberti, Ferdinando Arzarello, Ornella Robutti, Eugenia Taranto, et al

Il nuovo MOOC Numeri: obiettivi e aspettative

Livello Scolare: Tutti

Il progetto Math MOOC UniTo consiste nell'erogazione di MOOC (Massive Open Online Course) creati da insegnanti per insegnanti, al fine di promuovere la formazione di docenti in servizio di scuola secondaria sui Nuclei delle Indicazioni Ministeriali (Numeri, Geometria, Dati e Previsioni, Relazioni e Funzioni). Gli insegnanti-autori, sono stati corsisti del Master di secondo livello "Formatori in Didattica della Matematica", promosso dal Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino e lavorano alla progettazione, produzione ed erogazione dei MOOC in collaborazione con alcuni docenti e ricercatori universitari del medesimo Dipartimento.

Dopo il successo riscosso dal primo MOOC erogato, il "MOOC Geometria", un nuovo team (più ampio, all'interno del quale si distinguono differenti ruoli: coordinamento, regia, ricerca, predisposizione materiali, digitalizzazione, beta testing) si sta dedicando a concludere la realizzazione del secondo MOOC, ovvero "Numeri", la cui erogazione è prevista a partire da ottobre 2016, per una durata di 6 settimane.

Come Geometria, anche Numeri sarà un corso aperto e gratuito, disponibile online sulla piattaforma Moodle, che propone la fruizione di materiali (in cui vengono impiegati software matematici come Geogebra, Excel, …) creati dai corsisti del Master Formatori in Didattica della Matematica dell'Università di Torino mediante strumenti tecnologici che favoriscono la comunicazione e la condivisione. Attraverso l'utilizzo diretto di tali risorse il docente sperimenterà modalità per socializzare la propria esperienza e verrà sollecitato a pensare come queste possano essere riutilizzate nella propria pratica didattica, attraverso formati innovativi per migliorare l'apprendimento degli studenti e stimolare il loro interesse.

Il progetto monitorerà la partecipazione e il coinvolgimento dei docenti in questa nuova modalità di formazione, nonché la ricaduta delle proposte nella prassi della didattica della matematica, per verificare lo sviluppo professionale e la creazione di comunità di pratica fra i docenti.

I corsi si svolgeranno interamente a distanza e rispondono in maniera immediata alla richiesta di una formazione che si adatti a ogni esigenza di luogo, orario e tempi di apprendimento.

Il completamento delle attività richieste per ogni modulo viene attestato con l'assegnazione di un badge, ottenuto dopo aver compilato un breve test finale. Al termine del percorso, si ottiene un ultimo badge, che rappresenta la certificazione del conseguimento delle competenze previste per il percorso formativo.

Per la progettazione del MOOC si collaborerà anche con l'équipe diretta dal prof. Luc Trouche (ENS di Lione), coordinatore dell'equipe pedagogica di eFAN Maths che ha erogato, da marzo a maggio 2016, un MOOC per la formazione docenti in Francia.

La finalità che si persegue è di tracciare la strada per una nuova modalità di formazione e di monitorarne i passaggi al fine di valutarne l'impatto e la ricaduta nelle pratiche didattiche, affinché l'utilizzo della tecnologia generi un apprendimento consapevole.

CO9
Enrico Martoglio
Inserire belle figure nei propri documenti ossia: come usare GeoGebra con LATEX
Livello Scolare: Tutti

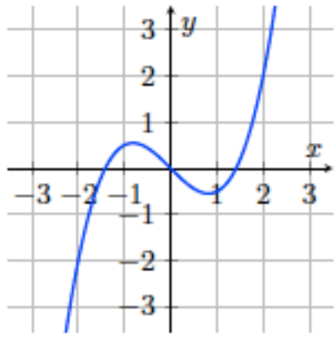
Sommario

La produzione di testi tecnico-scientifici di elevata qualità è talvolta resa difficoltosa dall'utilizzo dei più comuni *word processor* di tipo WYSIWYG. Il software LaTeX, così incomprensibilmente sconosciuto nel mondo scolastico così come in quello accademico, permette la redazione di testi esteticamente ineccepibili, consentendo con una facilità estrema l'inserimento di formule matematiche e di immagini. Queste ultime possono essere semplici scatti fotografici o – in questo contesto più interessante – grafici prodotti dai più diffusi software per la didattica della Matematica, come ad esempio GeoGebra.

Sovente, i testi che trattano di Matematica (siano essi articoli scientifici specialistici oppure classiche dispense a carattere didattico) prevedono l'inserimento di figure e grafici che possano agevolare il lettore nella comprensione dei concetti enunciati a parole. Oppure, al termine della creazione di una costruzione comunque complessa effettuata con un software di matematica (ad esempio: GeoGebra), permane l'intenzione di produrre un testo scritto che possa spiegare il senso di quello che si è appena realizzato. Va da sé che l'autore voglia inserire nel proprio testo una o più figure, a coronamento visivo dei propri risultati. Con GeoGebra esistono diverse possibilità: *screenshot* della schermata e successivo *copia-e-incolla* nel testo; esportazione di un file grafico in formato *.png*, *.eps*, *.GIF* (animato o meno) e seguente inserimento nel proprio elaborato.

Oppure (ed è questa l'intenzione di questo intervento), esportazione del relativo codice *PStricks* o *PFG/TikZ*, integrabili immediatamente in un file di codice LaTeX.

Ad esempio, una generando con GeoGebra il codice TikZ relativo al grafico di una semplice cubica di equazione $y = \frac{1}{2}x^3 - x$,



si ottiene il seguente codice (depurato di alcune righe di comando per ovvi motivi di spazio):

```
\begin{tikzpicture}
    \begin{axis}[%
    axis equal image,
    max space between ticks=20,
    axis lines = middle,
    xmin=-3.5, xmax=3.5,
    ymin=-3.5, ymax=3.5,
    grid=both,
    xlabel=$ x $, ylabel=$ y $;
    \addplot [thick,blue,samples=400] {0.5*x^3-x};
    \end{axis}
\end{tikzpicture}
```

che risulta essere inseribile in un documento di testo o una presentazione creati con LaTeX, compilato e visualizzato in un documento formato *.pdf*, pubblicabile in rete.

*I.I.S.S. "Einaudi-Casaregis-Galilei" Genova

CO10

Monica Mattei, Silvia Beltramino, Carlotta Idrofano, Daniela Pavarino, Annarosa Rongoni, Cinzia Soldera

Attività per una matematica accessibile e inclusiva

Livello Scolare: Tutti

Il laboratorio si basa sui lavori sviluppati nel progetto di ricerca "Metodologie, tecnologie, materiali e attività per un apprendimento della matematica accessibile e inclusivo" finanziato da Fondazione CRT e realizzato dal Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Torino con il coordinamento della Prof.ssa Ornella Robutti. Il gruppo di lavoro*, basandosi sui più attuali risultati di ricerca in tale ambito, ha progettato alcune attività per gli studenti della scuola secondaria di primo e secondo grado, in parte rivedendole dal progetto M@t.abel, in parte ex novo, con l'intento di puntare su un'ottica fortemente inclusiva, al fine di coinvolgere gli allievi con difficoltà nel lavoro di classe. Le attività sono poi state sperimentate nelle classi e si sono analizzati i processi degli studenti.

Il laboratorio si propone di coinvolgere i partecipanti nella sperimentazione in prima persona di alcune delle attività inclusive progettate. Si analizzeranno quindi quali sono le caratteristiche che possono favorire l'inclusività di una attività, a partire dalla fase di progettazione per arrivare alla fase di sperimentazione in classe, senza trascurare il coinvolgimento emotivo degli studenti. Una particolare attenzione verrà dedicata al ruolo della tecnologia, e in particolare di GeoGebra, e al suo contributo nel processo di inclusione di tutti gli studenti.

Per la scuola secondaria di I grado si proporrà, in particolare, un'attività nel nucleo Geometria relativa all'introduzione dei concetti di perpendicolare e di distanza di un punto da una retta, per arrivare al concetto di altezza. Un naturale sviluppo di tale lavoro porterà al concetto di altezza nello spazio. Per il biennio della scuola secondaria di II grado è prevista un'attività di esplorazione che permette di stimolare la riflessione e la produzione di congetture da parte degli studenti, con l'obiettivo di ricerca di regolarità, fino ad arrivare alla loro formalizzazione attraverso una relazione matematica, con le relative argomentazioni. L'esplorazione e la conseguente produzione di congetture sono affidate alla manipolazione con GeoGebra e si prevede, come obiettivo finale, la giustificazione delle congetture. L'attività ha anche lo scopo di intrecciare il linguaggio algebrico con quello naturale e con quelli numerico e grafico.

* Gli insegnanti che hanno partecipato al gruppo di ricerca sono: S. Abbati, B. Baldi, S. Beltramino, A. Berra, E. Calemma, A. Cena, P. Curletti, M. Dalè, A. Drivet, S. Fratti, L. Genoni, A. Ghersi, P. Gulino, C. Idrofano, D. Pavarino, F. Raina, A. Rongoni, D. Sasso, C. Soldera, G. Trinchero.

CO11

Margherita Motteran

Lavorare con le coniche per conoscerle meglio

Livello Scolare: Secondaria di II Grado II biennio

Premessa

In alcuni corsi di formazione per insegnanti, è stato osservato che molti studenti pensano che l'ellisse, la parabola e l'iperbole siano oggetti matematici senza connessioni tra loro, anche perché li incontrano come luoghi geometrici distinti e ne ricordano solo le equazioni canoniche presenti nei manuali. Le proprietà focali delle coniche trovano utili applicazioni nella realtà ma, anche per la difficoltà degli sviluppi matematici, sono poco conosciute nella scuola secondaria di secondo grado. Geogebra, con percorsi abbastanza semplici, accompagna a scoprire l'equazione generale delle coniche e le loro proprietà focali.

Percorso 1: Alla scoperta dell'equazione generale delle coniche.

Si apre Geogebra (Vista Algebra), si inserisce l'equazione canonica di un'ellisse, si osserva il grafico ottenuto, si applicano a tale conica trasformazioni geometriche diverse: una traslazione, una rotazione di un angolo diverso da un multiplo intero di un angolo retto, la composizione della rotazione e della traslazione già applicate. Si ragiona con gli studenti sulle equazioni che compaiono via via sullo schermo. Si ripete il procedimento applicandolo a una parabola e a un'iperbole. Si scrivono sulla lavagna le equazioni delle coniche ottenute con ogni costruzione: sono tutte equazioni di secondo grado in due variabili. Si verifica facilmente che ciascuna di esse si può ottenere da un'equazione generale, l'equazione generale delle coniche, attribuendo particolari valori ai coefficienti numerici. Se la classe ha sufficiente autonomia, si possono lasciare gli studenti liberi di scegliere arbitrariamente le traslazioni e le rotazioni da applicare, al fine di ottenere un maggior numero di equazioni da confrontare.

Questa attività offre un'occasione per riflettere sulle diverse scritture e sul significato dei termini dell'equazione di una conica, per applicare le trasformazioni geometriche piane e le loro formule, per avere una visione unitaria dei tre tipi di curve e fare almeno qualche cenno, anche storico, alle sezioni fra un piano e un cono indefinito a due falde.

Percorso 2: Alla scoperta delle proprietà focali delle coniche.
Con Geogebra, tracciando coniche, rette tangenti a una conica, rette mutuamente perpendicolari, rette simmetriche rispetto a un asse, si possono evidenziare le proprietà focali di tali curve, la cui scoperta, con riferimento alle leggi fisiche sulla riflessione, offre spunti per proporre alcuni esempi di oggetti o strumenti costruiti utilizzando le proprietà focali delle coniche, che sono note e applicate da secoli.

Appunti metodologici
I docenti che hanno realizzato almeno in parte i percorsi proposti in questo lavoro hanno rilevato che Geogebra ha consentito di ottenere abbastanza rapidamente risultati convincenti. A loro avviso è utile che, durante queste attività, gli insegnanti sollecitino la partecipazione attiva degli studenti ponendo loro domande mirate, alcune delle quali sono presentate in questo lavoro.

CO12
Monica Panero
Uso di GeoGebra nella formazione a distanza: il caso del MOOC francese eFAN Maths
Livello Scolare: Tutti

Questa comunicazione ha lo scopo di condividere e discutere un'esperienza di formazione a distanza svoltasi in Francia, più precisamente all'École Normale Supérieure di Lione. Nel corso di un post-dottorato in seno all'équipe EducTice, ho avuto la possibilità di partecipare al design e all'erogazione di un MOOC (Massive Open Online Course) intitolato eFAN Maths (Enseigner et Former avec le Numérique en Mathématiques). Il MOOC, destinato principalmente a docenti, formatori, studenti universitari e futuri insegnanti francofoni, ha contato circa 2500 iscritti in tutto il mondo. Pensato come accompagnamento all'entrata in vigore dei nuovi programmi per la scuola dell'obbligo (prevista per settembre 2016), sono stati privilegiati contenuti di matematica e di didattica della matematica introdotti dal nuovo curricolo e di particolare importanza per la scuola secondaria di primo grado (informatica, interdisciplinarità, ...). Il MOOC si è composto di cinque settimane di corsi, quiz, attività individuali e progettazioni collettive. L'obiettivo generale era accompagnare gli iscritti nella progettazione individuale o collettiva di un'attività di insegnamento o di formazione che prevedesse l'uso della tecnologia. Per conseguire questo macro-obiettivo, ogni settimana si è sviluppata attorno ad un micro-obiettivo preciso: familiarizzazione con i contenuti del MOOC e individuazione della tematica del proprio progetto (settimana 0); selezione ragionata delle tecnologie necessarie allo sviluppo del proprio progetto (settimana 1); analisi della situazione matematica progettata dal punto di vista dell'attività dello studente (settimana 2); analisi della situazione dal punto di vista del ruolo del professore (settimana 3); valutazione della qualità dei progetti, attraverso una peer review (settimana 4).
Ogni settimana sono stati resi disponibili tre video, ciascuno seguito da un quiz relativo ai contenuti del video: concetti, esempi e quadri provenienti dalla didattica della matematica utili per conseguire il micro-obiettivo della settimana. In particolare, nei corsi si discutono, tra gli altri, alcuni esempi di attività realizzate con GeoGebra per l'insegnamento dell'analisi, della geometria e degli algoritmi. In questa comunicazione, presenterò due esempi.

- Il primo è stato proposto in un quiz della settimana 1 come supporto per l'analisi di un'attività di modellizzazione di un fiocco di neve attraverso un algoritmo, finalizzata a sviluppare la creatività degli studenti[3]; l'algoritmo per il fiocco di von Koch è guidato passo a passo in GeoGebra e se ne richiedono varianti o altri esempi.
- Il secondo è stato proposto in uno dei video della settimana 2 per favorire la riflessione sul concetto di variabile nello studio di un grafico tempo-distanza[4]; la situazione matematica, ricostruita in GeoGebra, è analizzata a priori in termini di difficoltà degli studenti per poterle prevedere e gestire nell'ottica di una valutazione formativa in classe.

In entrambi i casi, mi concentrerò sulle scelte del team di formatori inerenti all'utilizzo di GeoGebra nei corsi a distanza. Concluderò con una discussione di tale scelte, tenendo conto anche dell'avviso dei corsisti, manifestato tramite i forum, le valutazioni e i questionari.

[3] Attività adattata dal progetto europeo MC Squared (Mathematical Creativity Squared).
[4] Attività adattata dal progetto europeo FaSMEd (Formative Assessment in Science and Maths Education).

CO13

Carlotta Soldano, Daniele Manzone

L'apprendimento attraverso la 'logica della ricerca': un'analisi di attività-gioco di geometria elementare all'interno di ambienti di geometria dinamica

Livello Scolare: Secondaria di I Grado

Lo sviluppo di competenze logico-argomentative è fondamentale per la formazione e lo sviluppo cognitivo degli studenti. Grazie ad esse è possibile, non solo sostenere le proprie tesi e valutare criticamente le tesi altrui, ma anche comprendere il pensiero scientifico e matematico.

Numerose ricerche in didattica della matematica si sono occupate delle difficoltà riscontrate dagli studenti nell'approccio alla dimostrazione e hanno evidenziato come il senso della dimostrazione sia una delle principali difficoltà riscontrate dagli studenti in ambito matematico. Le rilevazioni nazionali e internazionali (INVALSI, TIMSS), mostrano che gli studenti italiani sono molto deboli nella formulazione di risposte aperte, ossia di quelle risposte che necessitano la capacità di produrre argomentazioni. Riflettere su come ragioniamo o come dovremmo ragionare, può aiutare gli studenti nell'approccio al pensiero matematico teorico. Gli studi sviluppati da J.Dewey e da J.Hinitkka hanno mostrato che le logiche che caratterizzano alcune situazioni della vita quotidiana, le mosse interrogative e strategiche proprie della teoria dei giochi e le implicazioni che costituiscono i passaggi di una dimostrazione hanno radici cognitive comuni.

A partire da questi studi, abbiamo progettato su DGS attività-gioco finalizzate alla scoperta di alcuni teoremi di geometria elementare: relazioni tra le posizioni reciproche di due circonferenze e la somma/differenza dei loro raggi, relazioni tra la misura degli angoli al centro e alla circonferenza. Gli studenti sono stati guidati allo svolgimento delle attività-gioco, agendo come detective alla ricerca della strategia vincente e, parallelamente, dell'enunciato del teorema: porsi domande, osservare fatti e relazioni, formulare ipotesi e verificarne la correttezza. Attraverso i meccanismi di indagine messi in atto durante il gioco, gli studenti hanno acquisito familiarità con le regole logiche-strategiche del ragionamento matematico e hanno scoperto, grazie alla riflessione condotta attraverso schede guidate e discussioni matematiche, i teoremi di geometria su cui sono stati costruiti i giochi.

La presentazione si focalizzerà su tali attività e sull'analisi dei processi cognitivi messi in atto dagli studenti della scuola secondaria di primo grado coinvolti nelle sperimentazioni, inoltre analizzeremo efficienza ed efficacia del percorso svolto e valuteremo buone pratiche (approccio laboratoriale, utilizzo ICT, problem solving, costruzione di radici cognitive durature) e criticità (competenze tecnologiche, inserimento nella programmazione), in ottica di una possibile implementazione o riproposizione in altri contesti.

Bibiografia essenziale

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. (In D.Pimm (Ed.), Mathematics, teachers and children. London: Hodder and Stoughton). 216–235.

Dewey, J., & Visalberghi, A. (1974). Logica, teoria dell'indagine. 1-2. Einaudi.

Dewey, J. (1925). Logic: The theory of inquiry (1938). The later works, 1953, 1–549.

Dvora, T. (2012). Unjustified assumptions in geometry made by high school students in Israel, PhD Dissertation, Tel Aviv University-The Jaime and Joan Constantiner School of Education

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. For the Learning of mathematics, 3((2), 8–24.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. Journal for Research in Mathematics Education, 31(4), 396–428.

Hintikka, J. (1998). The principles of mathematics revisited. Cambridge: Cambridge University Press.

Hintikka, J. (1999). Inquiry as inquiry: a logic of scientific discovery. Springer Science + Business Media Dordrecht

Marton, F., Tsui, A. B., Chik, P. P., Ko, P. Y., & Lo, M. L. (2004). Classroom discourse and the space of learning. Routledge.

Reiss, K., Klieme, E., & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 97–104). Utrecht: PME.

CO14

Maria Spreafico, Martino Pavignano, Ursula Zich

GeoGebra, matematica e disegno architettonico

Livello Scolare: Università

In questo intervento vorremmo proporre l'utilizzo di GeoGebra come strumento per indagare il disegno architettonico dal punto di vista matematico. L'applicazione presentata è stata realizzata da un gruppo di ricercatori e dottorandi del Politecnico di Torino. Questo approccio potrebbe essere interessante anche nelle scuole superiori per il suo aspetto interdisciplinare.

Il nostro gruppo ha sperimentato questa analisi su alcune tavole del trattato di Vignola, *Regola delli cinque ordini d'architettura di M. Iacomo Barozzio da Vignola* (Roma, 1562), dove l'autore descrive graficamente i più importanti ordini architettonici.

Nelle 29 tavole descrittive non è sempre facile l'interpretazione rigorosa del passaggio dalla rappresentazione 2D alla realizzazione 3D dell'elemento. Infatti il Vignola non mette in evidenza, se non per via grafica, la corrispondenza tra un profilo, il relativo solido e l'insieme di elementi dell'ordine descritto, omettendo indicazioni esplicite sulla sua generazione 3D.

Abbiamo utilizzato il software GeoGebra con i seguenti tre scopi:

1) Descrivere o verificare le costruzioni geometriche alla base di alcuni elementi dei disegni (Figura 1)

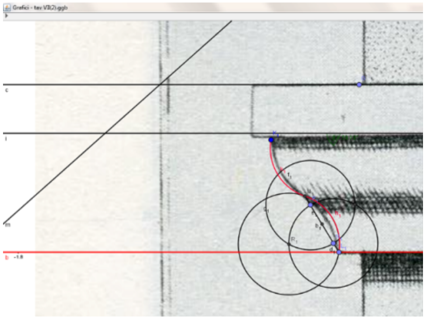


Figura 1

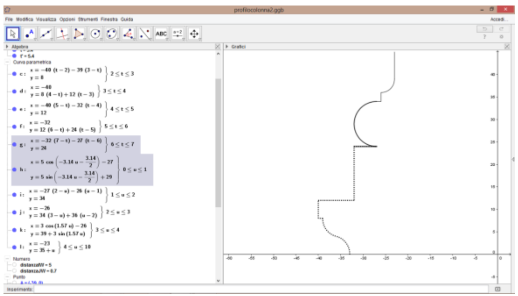


Figura 2

2) Ricostruire le equazioni dei profili 2D per ottenere poi la descrizione dei solidi di rotazione e traslazione presenti nell'architettura (Figura 2)
3) Indagare e descrivere le spirali che disegnano le volute del capitello ionico, con vari metodi geometrici (Figure 3, 4), anche confrontandole con le spirali "naturali": ovvero quelle logaritmiche.

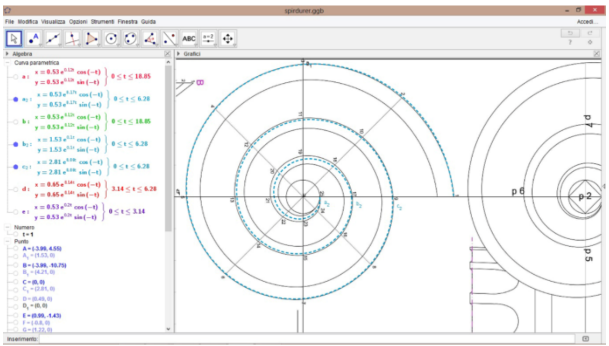


Figura 3

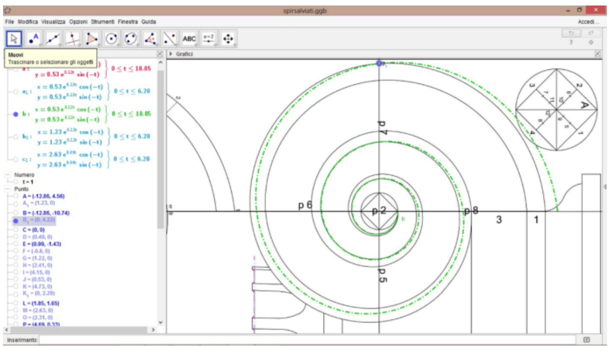


Figura 4